Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Przykładowe sformułowania zadań sterowania optymalnego

Projekt przejściowy

Piotr Jarzyński

Praca dostarczona: 14.01.2018

Streszczenie Praca została poświęcona pojęciom związanym z optymalnym sterowaniem oraz zadaniom sterowania optymalnego, a także zagadnieniom związanym z zasadami optymalności.

Piotr Jarzyński
238948

Spis treści

1 Sterowanie optymalne

1.1 Optymalizacja i sterowanie optymalne - definicja

Optymalizacja jest zbiorem metod i procesów osiągających najlepsze optymalne rozwiązanie zadanego kryterium jakości. Szczególnym przypadkiem optymalizacji jest optymalizacja wielokryterialna, która jest bardzo szeroko stosowana m.in. w przemyśle motoryzacyjnym czy mechanicznym.

Sterowanie optymalne jest ogółem najlepszych dopuszczalnych procesów sterowania maksymalizujących zadane kryterium jakości (**wskaźnik**). Proces sterowania składa się z zestawienia trajektorii stanu i sterowania:

$$(x,u) \in X \times U$$

X - przestrzeń trajektorii stanu
U - przestrzeń sterowania

Optymalizacja układów sterowania dla danego układu jest bezpośrednio związana z poszukiwaniem procesu sterowania zapewniającego **ekstremum wskaźnika jakości procesu** (np. zysk z prowadzenia procesu) i musi być **dopuszczalna** pod kątem ograniczeń wynikających z warunków prowadzenia procesu (np. ograniczenie zużycia surowców).

Zagadnienia sterowania optymalnego wymagają stworzenia matematycznego odzwierciedlenia wskaźnika jakości procesu, który ma być optymalny. Stąd często wykorzystuje się pojęcie funkcjonału, mapowania przypisującego danej funkcji liczbę:

Przykład

$$f(x) \to Q$$

$$\max_{x \in R} = \mid f(x) \mid$$

$$Q = \int_a^b f^2(x)dx$$

Problem optymalizacji niesie więc ze sobą zmiany w zawartych zjawiskach fizycznych oraz wymaga podjęcia najlepszej optymalnej decyzji, np. układ fizyczny i jego zmiany będące w zasięgu działania zadanych czynników dokonują się tak, aby energia układu była jak najmniejsza. Do badania dynamiki zamian układu wykorzystuje się minimum pewnej funkcji zależącej od tej dynamiki, tzw. funkcjonału energii.

1.2 Optymalizacja statyczna

Podłożem optymalizacji statycznej jest poszukiwanie **ekstremum funkcji**. Ten typ optymalizacji jest wykorzystywany do znalezienia optymalnego punktu, w którym wartość funkcji celu jest najlepsza z możliwych - w zależność od zadania wartość może być największa lub najmniejsza, ale zawsze ekstremalna. Szukanie najlepszej wartości funkcji jest możliwe również na ograniczonym obszarze zawierającym tylko jedno ekstremum, taki proces nazywa się **poszukiwaniem ekstremum lokalnego**. Przeszukiwanie całej przestrzeni nazywa się **poszukiwaniem ekstremum globalnego**.

Znaleźć takie $x^* \in X$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi
$f(x^*) \leqslant f(x)$,
gdzie ograniczenie $x \in X$, a X jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych
(min)

1.3 Optymalizacja dynamiczna

Podłożem optymalizacji dynamicznej jest poszukiwanie **ekstremum funkcjonału**. Przykładowe zadanie optymalizacji dynamicznej złożone jest z znalezienia takiego ciągu decyzji w określonym przedziale czasowym, które zagwarantuje ekstremum założonego wskaźnika jakości, zależącego od przebiegu zmian decyzji. **Wskaźnik jakości jest więc funkcjonałem tej decyzji, określanym na danym przedziale czasu**.

Znaleźć takie $x^*(t)$, że dla każdego $x(t) \in X$ zachodzi
$Qx^*(t) \leqslant Qx(t)$,
a X jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych (min)

2 Przykładowe zadania

2.1 Sterowanie docelowe

Sterowanie docelowe jest bardzo istotnym przypadkiem sterowania optymalnego szeroko stosowane w wielu gałęziach procesów przemysłowych, m.in.: metalurgicznych czy biotechnologicznych. Polega na wyborze trajektorii optymalnej ze zbioru wszystkich trajektorii stanu przeprowadzających obiekt ze stanu początkowego do zadanego stanu końcowego, dla której minimalizowany jest wskaźnik jakości procesu.

Podstawowe zadanie optymalnego sterowania docelowego polega na minimalizacji całkowitego wskaźnika jakości (koszt sterowania)

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt$$

z uwzględnieniem równania stanu

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_1],$$

warunków dwugranicznych, przy danym stanie początkowym x_0 i końcowym x_1 i t_1

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania, gdzie U jest zbiorem sterowań dopuszczalnych

$$u(t) \in U, t \in [t_0, t_1]$$

2.2 Sterowanie minimalno-energetyczne

Jest to rodzaj sterowania optymalnego docelowego, którego wskaźnik jakości charakteryzuje się minimalnym zużyciem energii do osiągnięcia wyznaczonego celu. Jednym z przykładów takiego sterowania jest możliwość sterownia w sposób minimalno-energetyczny silnikiem prądu stałego.

$$g(x(t), u(t), t) = u^2(t)$$

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t)dt$$

Przykład Minimalno-energetyczne nagrzewanie zbiornika z cieczą: zminimalizować straty energetyczne

$$G(x,u) = \int_0^1 u^2(t)dt$$

proces nagrzewania opisywanego równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t), t \in [0,1]$$

z warunkiem dwugranicznym

$$x(0) = x_0, x(1) = x_1,$$

gdzie *x(t)* jest temperaturą cieczy w zbiorniku w chwili t, x_0 jest jego zadaną temperaturą początkową, x_1 jest jego zadaną temperaturą końcową, *u(t)* jest natęzeniem prądu obwodu grzejnego, a jest jego współczynnikiem stygnięcia cieczy, zaś b jest współczynnikiem nagrzewania cieczy.

2.3 Sterowanie minimalno-czasowe

Jest to rodzaj sterowania optymalnego docelowego, optymalne zadanie sterowania minimalno-czasowego są wykorzystywane do optymalizowania czasu potrzebnego do zrealizowania zadanego celu. Funkcjonałem celu (kosztu) jest więc czas realizacji celu. Przykładem zastosowania takiego sterowania jest optymalizacja sterowania minimalno-czasowa lotem ze zmienną prędkością.

$$g(x(t), u(t), t) = 1$$
$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_k} 1dt = t_k - t_0$$

Przykład Minimalno-czasowa stabilizacja oscylatora: sprowadzić oscylator do położenia równowagi w minimalnym czasie

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

z uwzględnieniem równań stanu oscylatora

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t), \dot{x_2}(t) = -ax_1(t) + bu(t), t \in [t_0, t_1],$$

z warunkiem dwugranicznym

$$x_i(t_0) = x_{i0}, x_i(t_1) = x_{i1}, i = 1, 2,$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$|u(t)| \leqslant 1, t \in [t_0, t_1],$$

gdzie x_1 *(t)* jest położeniem oscylatora w chwili t, x_2 *(t)* jest prędkością oscylatora, *u(t)* jest jego siłą stabilizującą, a jest jego współczynnikiem amortyzaotra sprężynowego, zaś b jest współczynnikiem oddziaływania siły stabilizującej.

2.4 Sterowanie okresowe

Optymalne sterowanie tego typu zadania polega na wyborze ze zbioru wszystkich okresowych oddziaływań sterujących takiego, który zagwarantuje optymalny uśredniony wskaźnik jakości procesu np. maksymalną średnią wydajność. Przykładem zastosowania takiego sterowania może być proces chemiczny dążący do maksymalizacji wydajności procesu, czyli minimalizacji średniej ilości produktu ubocznego.

$$Q(\tau, x, u) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x(t), u(t))dt$$

przy ograniczeniach obejmujących równanie stanu o parametrach skupionych

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in [0, \tau],$$

zakres dopuszczalnych wartoci stanu i sterowania

$$x(t) \in X, u(t) \in U, t \in [0, \tau]$$

oraz średnią wydajność źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau Bu(t)dt = u_s$$

Przykład Rozważmy proces sterowania cyklicznego **stężeniem substancji surowcowej** A wprowadzanej do zbiornikowego reaktora chemicznego o działaniu ciągłym, gdzie zachodzi jej przemiana w produkt użyteczny B. Oznaczamy:

- *u(t)* - stężenie substancji A w strumieniu wejciowym reaktora w chwili t,
- *x(t)* - stężenie substancji A w reaktorze w chwili t,
- q - natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor.

Problem optymalnego sterowanie okresowego dla rozważanego przykłądu polega na maksymalizacji wydajności procesu (tj. na minimalizacji średniej ilości nieprzereagowanego produktu)

$$Q(\tau, x, u) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)dt$$

z uzględnieniem równania stanu

$$\dot{x}(t) = q(u(t) - x(t)) - kx^2(t), t \in [0, \tau],$$

chwilowych ograniczeń stanu i sterowania

$$x(t) \geqslant 0, 0 \leqslant u(t) \leqslant 2, t \in [0, \tau],$$

oraz średniej wydajności źródła surowca

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = 1$$

2.5 Regulacja stanu

Ten typ sterowania optymalnego ma bezpośredni wpływ na korektę przebiegu trajektorii stanu i wybór optymalnego sterowania dokonującego tej poprawki. Przykładowym zastosowaniem tego sterowania optymalnego jest minimalizacja straty energetycznej na sterowaniu.

Przykład Minimalizacja zużycia surowca w chemicznym procesie produkcyjnym.
W przepływowym reaktorze chemicznym zachodzi proces przemiany surowca A w produkt użyteczny B i w produkt uboczny C. Wyróżniamy zmienne stanu:

- $x_1(t)$ - stężenie surowcai A w reaktorze, $x_2(t)$ - steżenie produktu użytecznego B w reaktorze,
- $u_1(t)$ - stężenie surowca A w strumieniu wejściowym reaktora, $u_2(t)$ - natężenie przepływu mieszaniny przez reaktor.

Należy minimalizować średnie zużycie surowca

$$G(x,u) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u_1(t)u_2(t)dt$$

z uwzględnieniem równania stanu

$$\dot{x_1}(t) = u_1(t)u_2(t) - u_2(t)x_1(t) - 3x_1^2(t) - ax_1(t),$$
$$\dot{x_2}(t) = -u_2(t)x_2(t) + 3x_1^2(t)$$

ograniczenia technologiczne w postaci zadanego średniego poziomu nieprzereagowanego surowca i średniego poziomu produkcji składnika użytecznego

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x_i(t)dt = 1/3, i = 1,2,$$

oraz ograniczenia chwilowe stanu i sterowania

$$0 \leqslant x_i(t), 0 \leqslant u_i(t) \leqslant 2, i = 1,2,$$

przy czym a jest parametrem o nominalnej wartości $a = 1$, który jednak podlega częstym fluktuacjom.

2.6 Sterowanie liniowo-kwadratowe

Przykład tego rodzaju dotyczy sterowania optymalne przy kwadratowym wskaźniku jakości (LQR). Ten typ sterowania korzysta z **regulatora liniowo-kwadratowego ze sprzężeniem zwrotnym** bazującego na zasadach sterowania optymalnego wykorzystywanego w układach liniowych. Funkcją tego rozwiązania jest minimalizacja kwadratowego wskaźnika jakości (funkcji kosztów).

Dany jest **liniowy** system ciągły opisywany równaniem:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\textit{kwadratowa funkcja kosztów}$$

$$G = \underbrace{x^T(t_k)F(t_k)x(t_k)}_{koszt-stanu-kocowego} + \int t_0{}^{t_k}(x^TQx + u^TRu)dt$$

Gdzie x i u są ciągłymi funkcjami czasu. Funkcję kosztów można intepretować jako karę nałożoną na wartości stanu układu oraz sterowania. Parametrami strojącymi regulator LQR są macierze $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{R}$, które działają na zasadzie wag mówiących o tym jak duży ciężar kary związany jest z poszczególnymi składowymi stanu i sterowania. W tego typu rozważaniach dużą rolę odgrywa wymiarowość macierzy. Jeśli stan jest wektorem o ilości elementów $\boldsymbol{m}$, a sterowanie zawiera $\boldsymbol{n}$ składowych to macierze $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{R}$ są **macierzami diagonalnymi** o nieujemnych wartościach na głównych przekątnych i rozmiarach kolejno $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$.

Rozwiązaniem problemu liniowo-kwadratowego dla problemu regulacji jest wektor wzmocnień $\mathbf{K}$, do wyznaczenia której konieczne jest rozwiązanie równania Riccatiego. Aby dla danego problemu zawsze istniało rozwiązanie należy zapewnić sterowalność regulowanego obiektu. Sterowalność mówi o tym, że istnieje możliwość przeprowadzenia układu z dowolnego warunku początkowego do zadanego warunku końcowego w skończonym czasie. Aby sprawdzić czy dany układ jest sterowalny należy sprawdzić rząd macierzy sterowalności danej postaci:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad ... \quad A^{n-1}B],$$

gdzie n - rząd układu. Jeżeli rząd tej macierzy S jest równy rzędowi układu, wtedy układ jest sterowalny.

Przykład Jako przykład wykorzystania sterowania LQR wykorzystany zostanie układ wahadła z tłumikiem. Układ opisany jest równaniem różniczkowym.

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{\tau}{ml^2} - \frac{g}{l}\sin\Theta - \frac{a}{ml^2}\frac{d\Theta}{dt}$$

Zlinearyzowany układ opisany jest następującymi równaniami stanu

$$\dot{x} = Ax + BU$$
$$y = Cx$$

Gdzie macierze opisujące otrzymany układ są następujące

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Następnie przeprowadzono symulacje dla dwóch różnych macierzy wag stanu Q

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, R = 1$$

Oraz

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 1$$

Jak widać zmiana wagi odpowiedzialnej za drugą zmienną stanu w kryterium jakości działania regulatora miała znaczący wpływ na przebiegi przejściowe prędkości kątowej wahadła (druga zmienna stanu).

Dla pierwsze przypadku macierz sprzężenia od stanu miała postać

$$K = [4.164 \quad 1.144]$$

Dla tak dobranej wartości macierzy sprzężenia od stanu bieguny układu zamkniętego są następujące

$$\lambda_1 = -3.88; \quad \lambda_2 = -2.835$$

3 Zasady i funkcje sterowania optymalnego

3.1 Mnożniki Lagrange'a

Jest to przykład wykorzystywany w optymalizacji do obliczania ekstremum warunkowego funkcji różniczkowalnej.

Jeżeli funkcja $f(x) : R^n \to R$ (tzn. x jest wielowymiarowe) ma ekstremum warunkowe w punkcie x^*, przy warunku $G(x) = 0$, gdzie $G(x) : R^n \to R^m$, to w punkcie $x = x^*$ spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} f'(x) = \Lambda \circ G'(x) \\ G(x) = 0 \end{cases}$$

gdzie

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^T$$
$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m - tzw.\boldsymbol{mno\dot{z}niki\ Lagrange'a}$$

Przykład Zminimalizować funkcję

$$f(x, y) = x + y$$

przy ograniczeniu, że punkt (x,y) leży na okręgu jednostkowym, tj.

$$x^2 + y^2 = 1$$

czyli

$$G(x, y) = 0,$$
$$gdzie \quad G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Tworzy się funkcję

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda G(x, y)$$

Można pokazać, że warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcji *(x,y)* jest

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

W naszym przykładzie

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

co prowadzi do rozwiązania $x = y, 2x^2 = 1$, a zatem

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad lub \quad x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.2 Zasada maksimum Pontriagina

Jest to zasada wykorzystująca równania Lagrange'a i równania Hamiltona. Zasada ta jest warunkiem koniecznym optymalności w zadaniach sterowania optymalnego. Obecność ograniczeń stanu końcowego może powodować, że sterowanie optymalne jest wyznaczane tylko przez ograniczenia zadania. Wówczas mnożnik Lagrange'a $\lambda 0$, związany z minimalizowanym funkcjonałem, jest równy zeru i mówimy, że zadanie jest nienormalne. W przeciwnym przypadku zadanie jest normalne.

W podstawowym problemie sterowania optymalnego minimalizacja podlega całkowym wskaźnik jakości

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt$$

z uwzględnieniem ograniczeń w postaci równania stanu procesu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(t_0) = x_0$$

oraz ograniczeń w postaci dopuszczalnego chwilowego zakresu wartości sterowania

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1]$$

gdzie funkcje

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \quad f : R^n \times R^m \times R \to R^n$$

są, ogólnie biorąc, nieliniowe.

Definiujemy funkcję Hamiltona (hamiltonioan) w postaci

$$H(\lambda(t), x(t), u(t), t) = -g(x(t), u(t), t) + \langle \lambda(t), f(x(t), u(t), t) \rangle$$

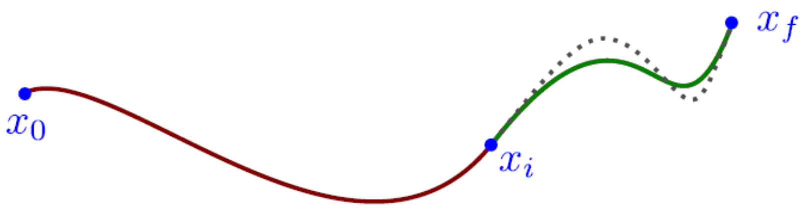
Jeżeli (x^*, u^*) jest optymalnym procesem sterowania, to sterowanie u^* maksymalizuje hamiltonian problemu, tj.
$H(\lambda^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} = H(\lambda^*(t), x^*(t), u(t), t)$
gdzie $\lambda^*(t)$ (tzw. funkcja sprzężona) spełnia liniowe równanie różniczkowe (tzw. sprzężone)
$\lambda'^*(t) = -f_x^T(x^*(t), u^*(t), t) + g_x^T(x^*(t), u^*(t), t)$

z warunkiem końcowym

$$\lambda^*(t_k) = 0$$

3.3 Zasada optymalności Bellmana

Zasada tłumaczy optymalność: koniec trajektorii optymalnej jest optymalny sam dla siebie (w rzeczywistośsci fragment trajektorii optymalnej jest optymalny). W rozumowaniu tym należy uwzględnić warunki początkowe i końcowe wynikające z wybranego fragmentu trajektorii. Należy to rozumieć następująco: jeśli zaplanowano optymalny ruch do stanu x_0 do x_f to optymalna trajektoria planowana ze stanu x_i (zwarunkiem początkiowym x_i) do stanu x_f będzie fragmentem trajektorii uzyskanej uprzednio (trajektorie mogą się różnić, jednakże koszt będzie ten sam).



Trajektoria optymalna

Definiujemy funkcję Bellmana (zwaną także funkcją jakości optymalnej) jako optymalną wartość wskaźnika jakości na końcowym odcinku trajektorii procesu [t, t_1]

$$S(x(t),t) = \min_{t\in U[t,t_k]} \int_t^{t_k} g(x(\tau),u(\tau),\tau),d\tau,$$

$$przy - warunku \quad x(t_k) = x_k$$

Funkcja $S(x(t),t)$ określa jaki jest najmniejszy możliwy koszt dotarcia do stanu końcowego x_k w chwili t_k, jeżeli w chwili t obiekt znajduje się w stanie x(t).

$$S(x(t),t) = \min_{t\in U[t,t_k]} \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau),u(\tau),\tau),d\tau + S(x(t+\Delta t),t+\Delta$$

po rozwinięciu funkcji $S(x(t+\Delta t),t+\Delta t)$ w szereg Taylora względem punktu $S(x(t),t)$ i przejściu $\Delta t \to 0$ otrzymuje się równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

$$-S_t(x(t),t) = \min_{u(t)\in U} g(x(t),u(t),t) + S_x(x(t),t)f(x(t),u(t),t))$$

$$gdzie$$

$$S_t(x(t),t) = \frac{\partial}{\partial_t}S(x(t),t) \quad i \quad S_x(x(t),t) = \frac{\partial}{\partial_x}S(x(t),t)$$

Literatura

1. T. Kaczorek *Teoria sterowania.* PWN, Warszawa, t.1 1997, t.2 1981.
2. H. Górecki *Optymalizacja systemów dynamicznych.* PWN, Warszawa, 1993.
3. R. Bellman *Adaptacyjne procesy sterowania.* PWN, Warszawa, 1965
4. `https://www.wikipedia.org/`
5. `http://www.cs.put.poznan.pl/jjozefowska/wyklady/bo/W2_TO_handouts.pdf`
6. `https://www.academia.edu/2306888/Sterowanie_minimalno-energetyczne_silnikiem_pr%C4%85du_sta%C5%82ego`
7. `http://www-users.mat.umk.pl/~wkrysz/attachments/sterowanie.pdf`
8. `http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/krystyn.styczen/`
9. `http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/grzegorz.mzyk/`
10. `http://bcpw.bg.pw.edu.pl/Content/767/21zdau_zarys.pdf`
11. `http://jtjt.pl/odwrocone-wahadlo`
12. `https://eia.pg.edu.pl/documents/184139/28396400/LQR.pdf`
13. `http://home.agh.edu.pl/~pba/pdfdoc/pmpn.pdf`